



ŠESTICÍPÁ SNĚHOVÁ VLOČKA A SIX-POINTED SNOWFLAKE

Václav Cílek

Sněhová vločka je pro matematika ideální novoroční dar. Vypadá jako hvězda a přichází z nebe.

Johannes Kepler

A snowflake is an ideal New Year's gift for a mathematician. It looks like a star and it comes from the sky.

Johannes Kepler

Jsou hvězdy rozumnější než lidé ?

Johannes Kepler (1571 – 1630) přišel do Prahy řadu let před tím, než na jeho kabát usedla někde mezi Kamenným mostem a domem v Jezuitské ulici v zimě roku 1610 šesticípá sněhová vločka. Další vločka měla poněkud jiný tvar, ale rovněž šest cípů, a to se opakovalo u každé další vločky. Šest cípů, šest stran krychle, šest čísel kostky. Byla tohle náhoda, nebo se číslo přihlašovalo v různých měřítkách a souvislostech jednou jako nebeská harmonie oběhů dvou planet a podruhé jako studený bílý bod na hvězdářově zimníku? Jaký princip vybral číslo šest ze všech ostatních možných čísel? Bylo to velmi znepokojivé. *Neboť i Jobovi pravil Hospodin: „Pochopil jsi bohatství sněhu?“* A další záhada: vločka byla úplně plochá v hmotném světě, kde se vše snažilo zaujmout nějaký trojrozměrný tvar. Kdyby z nebe padaly krychle, osmistěny nebo šestiboké hranoly, bylo by to pochopitelnější, než ony podivné malé hvězdičky zrozené neznámou silou z chaosu beztvare vodní páry.

Kepler přišel do Prahy v roce 1600 a bylo mu tehdy 28 let. Žil zde až do císařovy smrti, tedy celých 12 let, na rozdíl od Tychona Braheho, který v Praze pobýval jen dva roky. Oba muži byli nesouměřitelní. Tychonův program byl pozorovat a měřit vše, co se na obloze hýbá. Měl ostrý zrak a rád se díval na hvězdy. Vystupoval jako kníže, byl zvyklý hovořit s králi, jeho dům byl plný hluku a služebnictva. Seděl na té největší hromadě pozorování, jakou kdy astronom shromáždil a nebyl schopný ji utřídit. Kepler byl spíš do sebe uzavřený a tichý. Nebavilo ho popíjet po hospodách, rád pracoval brzy ráno. Prál klidu a osamělosti. Jeho plat byl patnáctkrát nižší než Tychonův a dostával jej se stejnou pravidelností jako horníci na Vorkutě. Zpočátku jej posílal své ženě, ale i později, když se jeho rodina usadila v Praze, měl co dělat, aby uživil dorůstající děti. Svoji ženu přežil – je pohřbena u sv. Jiljí, ale hrob jsem nenašel.

Kepler špatně viděl, ale jeho mysl byla mimořádně ostrá. Nebyl šikovný a se složitými Tychonovými přístroji neuměl dobře zacházet. To, co jej zajímalo, nebyla astronomie ani matematika, ale harmonia mundi – soubor několika jednoduchých matematických vztahů, pomocí kterých Bůh řídí vesmír. Magie a mystika měla jen polo-intuitivně využívat matematická pravidla, záření zpívajících čísel, prostupující stvořeným prostorem, které chtěl Kepler objevit. Brahe neměl na Keplera čas a také asi

Are the stars smarter than people?

Johannes Kepler (1571 – 1630) came to Prague many years ago. During that time a six-pointed snowflake fell landed his coat. This happened somewhere between the Stone Bridge and a house in Jezuitská street in the winter of 1610. Another snowflake had quite a different shape but also had six points as did all the other snowflakes. Six points, like the six faces of a cube and the six figures on dice. Was this just an accident? Or does the number in a different connection mean on the one hand celestial harmony between the planets and on the other a cold white point on the astronomer's coat? What principle chose the number six out of all other possible numbers? It was very confusing. Even the Lord asked Job: Can you see the treasure of snow? And another mystery: The snowflake was completely flat in a material world in which everything takes a three-dimension shape. If cubes, octahedrons or hexahedrons were falling from the sky, it would be more comprehensible than those tiny flat stars created by an unknown power from the chaos of amorphous water vapour.

Kepler came to Prague in 1600; he was 28 years old at the time. He lived in Prague for twelve years, up until the time of the Emperor's death, in contrast to Tycho Brahe, who stayed in the city for only two years. The two scientists were very different. Tycho's programme was to observe and to measure everything that appeared and moved in the sky. He had keen sight and liked to stargaze. He acted like a prince, socialised with kings and his house was full of noise and servants. He was sitting at the very peak of the biggest mountain of knowledge and observation that an astronomer had ever accumulated, and he was not able to summarize it. Kepler was much more reserved, and was rather quiet and shy. He did not like to go to pubs, and liked to work early in the morning. He liked calm and solitude. His reward was fifteen times lower than Tycho's and he received his salary with the same regularity as the miners in Vorkuta. At first, he sent all the money to his wife, but later, when he and his family had settled down Prague, he had to work very hard to provide for his growing children. His wife died earlier than Kepler himself – she is buried at St. Jiljí but I have not found her grave.

Kepler had poor sight, but his mind was extraordinarily sharp. He was not adroit and he was not able to handle Tycho's instruments. He was not particularly interested in astronomy nor in mathematics, and was much more concerned with "harmonia mundi" – the set of mathematical laws through which the Lord



cítil převahu zkušeného praktika a muže světa nad přecitlivě-
lým, do sebe uzavřeným mužem, jehož vizionářství bylo dů-
kladně maskováno exaktní myslí. Podobně měl Kepler dojem,
že Tycho dětinší a že kvůli společenským kontaktům odsouvá
vědu. Vzájemné rozpory smazala Braheho smrt. Na smrtelné
posteli, obklopen žáky a služebnictvem, prosil Keplera, aby
dále rozpracovával jeho nauku.

Situace v Praze byla v té době jedinečná a to nejenom díky
osobě Rudolfa II., jemuž dobrá ekonomická situace království
umožňovala podporovat vědy a umění. Především rozdělená
církev nemohla uplatňovat onu názorovou hegemonii, která
vládla většině Evropy. A dál tu byla těžba stříbra a rybníkářství.
Doly v jáchymovském revíru se dostávaly do hloubek pod
300 m a to sebou přinášelo problémy s větráním a čerpáním
vody. Složité převody důlních strojů schopných vytahovat až
kubík vody se najednou uplatnily ve škole mechaniky, mistrně
uplatněné u Tychonových astrolábů. Konstrukce rybníčných
soustav, ve kterých desítky kilometrů dlouhé kanály, jako je
Opatovický kanál na Pardubicku, spojující na dvě stovky
nádrží, nebo Zlatá strouha v Třeboni, kladla velké požadavky
na přesné zaměření výšek v plochem terénu, kde o spádu vody
rozhodovalo pár centimetrů. Precizní zeměměřičské techniky
se daly dobře použít u hvězdověřičských problémů. Jak
odlišný byl přístup takového Giordana Bruna, který o pár let
před tím na Pražském hradě tvrdil, že hvězdy jsou rozumnější
než lidé, že mají svobodnou vůli a chodí si, kam chtějí.

Kde hmota, tam tvar – Ubi materia, ibi geometria

Od astronomie ke sněhové vločce je daleko, ale od poznávání
skryté symetrie vesmíru vede k drobnému chladnému objektu,
který ještě nedávno byl nemyslitelný parou bez paměti, jasný ná-
znak. V roce 1611 vydal Kepler u Godfreye Tampacha ve
Frankfurtu krátký latinský spisek o 4x6 stranách nazvaný
„Novoroční dar aneb o šestícípé sněhové vločce“. Kniha je dnes
považována za základní dílo vědecké krystalografie a jeden
z prvních pokusů o matematickou teorii vzniku organických
a anorganických tvarů. Často je připomínána Keplerova my-
šlenka nejtěsnějšího možného stěsnání atomů. Nechci na tomto
místě opakovat Keplerův myšlenkový postup od včelích plást-
ví až po zrna v granátovém jablku, který je popsán v tolika
učebnicích historie vědy. To, co mne zajímá, je historie imagi-
nace, zrcadla čísel otáčejících se v prostoru, osmistěn duše
Země, vyznařující utvářející sílu, jež ovlivňuje každou minerální
částičku, ale ne rostliny, které přece mají individuální duše.

Jenže tato velkolepá vize světa jako matematického stroje,
nenáhodného jako švýcarské hodinky, je nějak nelidská. Dante
někde v Božské komedii hovoří o kolečkách hodin, které se po-
dobají planetární soustavě. Myslí to doslova – hodiny nejsou
stroj určený k měření času, hodiny jsou modelem světa a to, že
jdou tak rychle jako svět, ukazuje, že jsou dobrým modelem.
Takhle nějak si představují sny diktátorů o čistém, hladce se otáče-
jící společnosti, kterou stačí jen trochu olejovat a odstraňovat ty

rules over the universe. Magic and mysticism applied mathemati-
cal laws only half-intuitively; Kepler wanted to reveal the shine of
singing numbers pervading the universe. Brahe did not have
much time for Kepler and as a more experienced practitioner he
may have felt superior to the oversensitive and reserved man
whose visionary qualities were well hidden by an exact mind. On
the other hand, Kepler thought Tycho had become childish and
was neglecting science for social contacts. Their antagonism dis-
appeared with Brahe's death. On his death bed, surrounded by
his disciples and servants, he implored Kepler to continue his
work.

The circumstances in Prague were unique to those times. The
economic situation of the kingdom was favourable and this
enabled Rudolf II to encourage science as well as art. Above all,
the divided Church did not have the ideological monopoly with
which it ruled over the rest of Europe. And then, there was silver-
mining and pond-keeping. The mines in the Jáchymov area
reached depths of 300 metres, creating problems with ventilation
and water-pumping. Complicated mining machines, which were
able to draw up to a cubic metre of water, were put into practice
at the mechanical school, in Tycho's labs. The construction of
ponds, interconnected by a network of canals, such as the
Opatovice Canal which connects around two hundred ponds, or
the Golden Canal in Třeboň, demanded exact measurements of
the height of flat ground, since only a few centimetres were deci-
sive for water declivity. Such exact geodesic measurements then
found use in stellar measurements. This was very different to
Giordano Bruno's approach. A few years earlier, speaking at
Prague Castle he said, "stars are cleverer than people, they have a
free will and they go wherever they want."

Matter and Shape – Ubi materia, ibi geometria

At first sight, the relationship between astronomy and a snow-
flake is not obvious. But if we compare the hidden symmetry of the
universe with a tiny cold object which has no memory and is
made from nothing more than water vapour, we can see a real
connection. In 1611, Kepler published a short paper, written in
Latin, of 4x6 pages called New Year's Present or About a Six-
pointed Snowflake, edited by Godfrey Tampach, and published in
Frankfurt. The book is considered a basic work in scientific crys-
tallography and the first attempt to develop a mathematical theo-
ry of organic and inorganic shapes. Kepler's thought about the
closest possible position of atoms is referred to quite often. I am
not going to repeat Kepler's progress from the thoughts of bee
honeycombs up to those of pomegranate grains which is descri-
bed in many books of the history of science. I am interested in the
history of imagination, a mirror of figures rotating in space, an
octahedron of the soul of the Globe emanating the creative power
which influences every mineral particle plants; they have indivi-
dual souls.

But this magnificent vision of the universe as a mathematical
machine as exact as a Swiss watch is not quite human. Dante in
his Divine Comedy talks about clock wheels which are similar to
the planetary system. This comparison is quite right. The clock is
not a machine devised to measure time, the clock is a model of the



šmejdy, kteří do ní nepatří. Tomu ovšem byl Kepler daleko, byť třicetiletá válka na obzoru. Brzy již přestane platit myšlenka, že uspořádání společnosti odráží nějaký nebeský řád vyjádřitelný matematickým vztahem. Nově definovat vesmír, o což se pokusil Koperník, Galileo i Kepler, znamenalo podívat se nově i na společnost. Vlastně mi není jasné, proč se třeba o Koperníkovi mluví v dějinách astronomie a ne sociologie. Leč nazpět k sněhové vločce a tázajícímu se Keplerovi:

Proč má šest cípů? Kdo vyřezal její jádro? Odkud pochází číslo šest a proč těch šest cípů je možné opsat kruhem? Teplo je všude – i když asi má nějakou prostorovou strukturu – tak proč vločky nejsou kulaté, ale ploché? Pozoroval s údivem (cum admiratione) jejich pád a měl pocit, že často vločku něco zadržuje ve vzduchu, pak se propadne a zase se chvíli vznáší. A neustále se ptal: *proč šest a ne pět nebo sedm?* Myšlenku, že každá vločka má duši, která jí říká, jaký tvar má odít, mu připadá absurdní. Musí tady být nějaký univerzální princip obsažený v Zemi, který ovlivní jádro vločky a to určí tvar ramen. Kepler zná tři tělesa, která umožňují zcela vyplnit prostor – kromě šestihranu to je krychle a osmistěn. Představuje si, že nějaká důležitá vlastnost Boha je krychlová nebo ve tvaru osmistěnu. A mně, jak si převracím v hlavě myšlenku krychlového boha, nevyvstávají před očima jenom pokusy kubistů dostat se k základnímu tvaru světa, ale samotná černá Kaaba v Mecce a tisíce muslimů, které kolem ní rotují. Kaaba znamená „cube, kuba“ neboli krychle a také má tento tvar odpovídající nějaké obzvláště posvátné boží vlastnosti, která se vtělila v Zemi.

Říše ducha se podobá pravidelnému geometrickému tělesu a člověk samotný je svými funkcemi podobný krychli. V těle Země existuje utvářecí síla, která je přenášena parou. Tato utvářecí síla nenese sebou jenom účel, ale také zdobí. Jejím zvykem je hrát si s uplývající chvílí, což se dá ukázat na mineralogických vzorcích rud, které nabývají mnoha různých tvarů. V Boží věčnosti je mnoho duchů, kteří jsou duchy prostorů a ne duchy povrchů, takže i tyto duchové musí mít tvar geometrických těles, jakým je krychle. A já si představuji, jak ve strašidelném hradě Národní galerie ve Veletržním paláci se nezjevuje mléčný přízrak třeba prof. Knížáka, ale svítící krychle, která je podle Keplera otcem všech těles. Krychle je tvarem rozdávaní, působení ven, zatímco osmistěn shromažďuje dovnitř, je sevřenější, dá se z krychle odvodit, ale má jen šest vrcholů. Klenotníci říkají, že nejkrásnější osmistěn lze nalézt u diamantu. Země, trojnásobně velké zvíře má duši, ve které jsou obsažena různá tělesa, Země do svého srdce uzavřela krychli i osmistěn a další tělesa. Je možné, že utvářecí síla v duši zvířete Země kolísá podle množství par, jež přenášejí její vlivy.

Pokusíme-li shrnout ono imaginativní a mimo-vědecké v Keplerově spisu o vločce, pak můžeme říci: Duše Země musí být všude, kde je voda či pára. V různých místech je nejenom nestejně mocná, ale také její utvářecí síla – *facultas formatrix* – může zvýrazňovat jiná geometrická uspořádání. Základní a nejsilnější však zůstává krychle a osmistěn. I člověk je duševně

universe, it works as exactly as the universe. And I imagine dictators' dreams about a perfectly functioning society which needs to be oiled and to be protected from all disturbing elements. However, this was not a Kepler's way of thinking, even though the Thirty Years' War was about to begin. The idea of a society reflecting the universal order expressed by mathematical law would soon be over. To define the universe in a new way, which was the aim of Copernicus and Galileo as well as Kepler, meant to look at society in a new way too. I do not really understand why we talk about Copernicus only in connection with astronomy and not with sociology. However, let's return to the six-pointed snowflake and Kepler's questions:

Why does the snowflake have six points? Who has created its kernel? Where does the number six come from? Why is it possible to circumscribe all the six points? If energy is everywhere and has a spatial structure, then why are the snowflakes flat and not round? He observed their fall with admiration (cum admiratione); he felt that the snowflakes flew, then fell, then flew a little while longer. And he did not stop asking: *Why does it have six points, not five or seven?* The thought of a soul in every snowflake, which orders its shape, seemed absurd to Kepler. The planet must have a universal principle which influences the kernel of a snowflake and that predestines its shape. Kepler knew of three solids which completely fill the space – the hexagon, the cube and the octahedron. He had the idea a divine character in the shape of a cube or an octahedron. And myself, when I think of the cubic God, I recall the attempts of Cubists trying to break the world down to its basic shape, and also the black Kaaba in Mecca and thousands of Muslims circling around it. Kaaba means cube (kuba) and it has a shape reflecting the special divine character which incarnated itself into the Globe.

The empire of the soul is similar to a geometric solid, and a human being in his or her function is similar to the cube. In the body of the Globe, there is a creative power transmitted by water vapour. This creative power is not only functional but also decorative. Its habit is to play a game with flowing time for which we have the evidence in mineralogical ore specimens which have several different shapes. In the divine eternity, there are a lot of souls which are the souls of space and not the souls of surface; so even these souls must have the shape of solids such as the cube. And I imagine that not as the milky ghost of prof. Knížák but as shining cube which appears in the eerie showplace of the National Gallery of Contemporary Art in Prague. The cube is a shape of giving, with effects on the outside, whereas the octahedron cumulates its energy in the inside: it is closer, it can be derived from the cube, but it has only six points. Jewellers say that the most beautiful octahedron can be found in a diamond. The Globe, a huge animal, has a soul which includes several solids; the Globe has a closed cube and an octahedron as well as other solids at its heart. It seems possible that the creative power in the soul of the Globe varies in its dependance on the quantity of water vapour which transmits its influence.

Let us try to sum up all that is imaginative and suprascientific in Kepler's snowflake paper. We can say: The soul of the Globe must be everywhere where water and water vapour are present. The soul is not equally powerful in different places and its



nějak podobný krychli. Země je zvíře a to dokonce trojnásobné, které má srdce a vyzařující duši. Nic z toho však Johannes Kepler netvrdí, pouze se ptá a odpověď mu není jasná – a úplně nakonec celý problém přehraje na chemika, který by s tím měl vědět rady lépe než on sám.

Historie sněhové vločky

Již někdy v druhém století si Číňané všimli, že sněhové vločky mají šest cípů, zatímco květiny a stromy bývají pětičetné. Evropská literatura o vločkách začíná konstatováním Alberta Magna (kolem roku 1260), že vločky mají hvězdovitý tvar. Pak až v roce 1555 nakreslil Olaus Magnus, arcibiskup uppsalský, 23 sněhových tvarů, ale teprve Kepler rozeznal šestičetnou symetrii. Ještě později R. Descartes v Meteorologii (1635) znovu zdůraznil symetrii sněhu a mezi tvary různých sněhových vloček překvapivě nakreslil dosti vzácný typ, který se podobá špulce od nití – ledovému sloupci na konci zakončenému šesticípými vločkami o větším průměru, než je průměr sloupce. A pak již následuje jedna práce za druhou – Erasmus Bartholinus, Robert Hooke, Donatto Rossetti, William Scoresby a další publikují detailní popisy sněžných krystalů. Významným uměleckým činem je vydání souboru 68 a později 97 sněhových vloček v dřevorytech cyklu Sekka Yusetsu od Japonce Tošicury Doia již v roce 1832.

Sníh je šestiboký, protože odráží vnitřní strukturu atomů, ve které se molekuly vody spojují do šestiúhelníků, jež mají další volné vazby otevřené do stran, kde vločky snadněji dorůstají do plochých destiček a nikoliv nahoru či dolů. Asi 80% sněhových vloček má tvar oněch keplerovských hvězdiček, ale tvar sněhu závisí hlavně na teplotě vzduchu. Při -3 až -5 °C nejlépe rostou sněhové jehličky, při -5 do -8 °C rostou duté sněhové sloupce, ještě za nižších teplot nalezneme tenké sněhové destičky a další různé tvary podle snižující se teploty. Citlivost na teplotu je tak velká, že v hraničních intervalech stačí rozdíl jednoho stupně, aby z nebe padaly jiné útvary. Největší sněhové vločky mají průměr okolo 12 cm, zatímco obvyklý průměr je 2,4 mm při ploše 1,3 mm² a nízké váze 2,3 miligramu, která vysvětluje pomalé padání sněhu. Věda na povrchní popisné úrovni si se sněhem umí poradit, jde-li ale na úroveň geometrie atomárních vazeb, pak se hmota jako taková stává záhadou.

A co se týče toho ostatního, tak je jedna věc čist o Keplerových názorech, a druhá představovat si, jak by takový svět prozařovaný silami geometrických těles vycházejícími z duše Země ve skutečnosti fungoval. Slova se mění v závrať. Věřím tomu, že zvíře Země má srdce a působí na nás, a nevím, co víc bych k tomu měl dodat.

Bibliografické poznámky

Anglický překlad Keplerova spisu vyšel jako bilingva v Oxford University Press v roce 1966 v překladu Colina Hardie. V němčině existují tři překlady, poslední v roce 1958 od H. Strunze a H. Borma pod názvem Über den hexagonalen Schnee (Berhard Bosse, Regensburg). Český překlad, pokud vím, neexistuje. Latinských vydání je několik – v roce 1868 vyšla Keplerova Opera omnia (ed. Frisch) a v roce 1941 Gesammelte Werke (ed. Caspar a Hammer). V textu této práce jsou kurzívou citovány autentické Keplerovy názory, ne však v doslovném znění.

creative power – facultas formatrix – may prefer different geometrical compositions. However, the cube and the octahedron remain the basic and most powerful solids. Also a human being is mentally similar to the cube. The Globe is an animal, and even a threefold animal, which has a heart and a shining soul. Johannes Kepler does not mention anything of these thoughts; he just asks the questions and the answer is not obvious to him and finally, he leaves the whole problem to chemists who would be more competent to deal with this problem than Kepler himself.

History of the snowflake

In the second century, Chinese noticed that snowflakes have six points, whereas plants are five-pointed. European literature on snowflakes begins with Albert Magnus (circa 1260) who says in his work that snowflakes are star-shaped. In 1555, Olaus Magnus, the Archbishop of Uppsala, drew 23 snow shapes. But it is only Kepler who revealed the six-pointed symmetry. Then René Descartes in Meteorology (1635) re-stressed the symmetry of snow and he drew a rare type of a snowflake; it is similar to a spool – a column of ice with six-pointed snowflakes of a larger diameter than the column itself at each end. After that we have several works in this field: Erasmus Bartholinus, Robert Hooke, Donatto Rossetti, William Scoresby and some others published detailed descriptions of snow crystals. Snowflakes found their way into art as well. We have a set of 68 and later 97 snowflakes in the woodcut cycle Sekka Yusetsu by Japanese artist Toshicura Doi from 1832.

Snow is hexahedral. Its appearance reflects its own inner atom structure in which molecules of water join together as hexagons which have open structures, open to sides. Snowflakes grow to flat plates and not up nor down. About 80% of snowflakes have the shape of Kepler's stars but the shape of snow depends especially on the temperature of the air. Snow pins grow at the temperatures of between -3 and -5 °C, hollow snow columns come about between -5 and -8 °C and we can find thin snow plates and other different shapes at lower temperatures. A difference of just one grade can cause a change in the structure of snow. The biggest snowflakes are 12 cm in diameter, whereas the average is 2.4 mm with a surface of 1.3 square mm which explaining the slow fall of snow. Science on a descriptive level is able to get to grips with the problem of snow. But at the level of the geometry of atomic structures, its matter remains a mystery.

And as for the other things. On the one hand, we can read about Kepler's laws. On the other hand, we can imagine how it works in reality – a world founded on the powers of geometrical solids originating in the soul of the Globe. The words are becoming more complicated and we begin to feel dizzy. I do believe that the Globe animal has a heart and that this influences us. I do not know what else I should say.

Bibliography

An English translation of Kepler's work, by Colin Hardie, was published by the Oxford University Press in 1966. There are three translations into German, the most recent one by H. Strunz and H. Borm under the name Über den hexagonalen Schnee (Berhard Bosse, Regensburg). A Czech translation, as far as I know, does not exist. There are several Latin editions; Kepler's Opera Omnia (edited by Frisch) from 1868, Gesammelte Werke from 1941 (edited by Caspar and Hammer). We paraphrase Kepler's opinions here (in italics).